-EXERCICE 9.1-

• ENONCE :

« Manège : vitesse et accélération »

• Un manège tourne à une vitesse angulaire constante ω autour de son axe vertical.

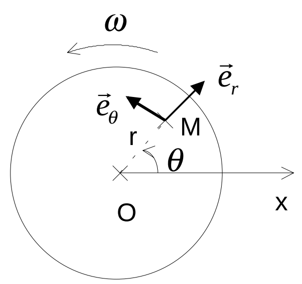
• En partant du centre, un homme suit un chemin radial avec une vitesse de module $v_1 = cste$ par apport au manège : le référentiel lié au manège sera noté (R_1).

1) Etablir l'équation de la trajectoire de l'homme (assimilé à un point matériel) par rapport au sol, le référentiel associé étant noté (R_2).
2) Par un calcul direct, déterminer l'expression de la vitesse de l'homme par rapport au sol, soit $\vec{v}_2$; retrouver ce résultat en utilisant la notion de point coïncidant.
3) De même, déterminer l'accélération de l'homme dans (R_2), soit $\vec{a}_2$, de deux manières différentes.
4) Exprimer le module de $\vec{v}_2$ et de $\vec{a}_2$ en fonction de v_1, ω et t.

• CORRIGE :

« Manège : vitesse et accélération »

1)



L'homme est représenté par le point mobile M.
L'axe Ox est **fixe** par rapport au référentiel (R_1).
$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est une base polaire liée au manège.
On peut alors écrire :

$r(t) = v_1 \times t$ et $\theta(t) = \omega \times t$, puisque v_1 et ω sont des constantes ; en éliminant le temps t entre ces 2 relations, on obtient : $\boxed{r(\theta) = \frac{v_1}{\omega} \times \theta}$ $\Rightarrow$ vue du sol, la trajectoire de l'homme est une **spirale**.

2) Dans le référentiel lié au manège, on a donc :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}_2 = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d(r\vec{e}_r)}{dt}\right|_{R_2} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\left.\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_{R_2} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\times\left.\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right|_{R_2}$$

Or : $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, $r(t) = v_1 t$, $\frac{dr}{dt} = v_1$ et $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}_2 = v_1\vec{e}_r + v_1\omega t\vec{e}_\theta}$ (1)

• Par ailleurs, on peut utiliser la relation de composition des vitesses :

$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_e$, où $\vec{v}_e$ est la « vitesse d'entraînement » ; c'est aussi la « vitesse du point coïncidant » P, confondu avec M à l'instant t, mais **appartenant au manège**.

Pour déterminer cette vitesse, il suffit de « visualiser » la trajectoire future de ce point P : il s'agit d'un cercle de rayon r, où r est la distance parcourue par l'homme sur le manège à l'instant t où les points P et M coïncident $\Rightarrow$ la vitesse de ce point par rapport au sol est alors tangente à ce cercle, donc orthoradiale, de module $v_e = r\omega = v_1 t \times \omega$ $\Rightarrow$ on a donc bien :

$$\boxed{\vec{v}_2 = v_1\vec{e}_r + v_e\vec{e}_\theta = v_1\vec{e}_r + v_1\omega t\vec{e}_\theta}$$

3) Un premier calcul de l'accélération consiste à dériver directement la relation (1) dans le référentiel (R_2) lié au sol, d'où :

$$\vec{a}_2 = \left.\frac{d\vec{v}_2}{dt}\right|_{R_2} = v_1 \times \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{d(v_1\omega t\vec{e}_\theta)}{dt} = v_1\omega\vec{e}_\theta + v_1\omega\vec{e}_\theta + v_1\omega t \times \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_2 = -v_1\omega^2 t\vec{e}_r + 2v_1\omega\vec{e}_\theta}$$

• On peut également appliquer la relation :

$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_e + \vec{a}_c$, où $\vec{a}_e$ est l'accélération d'entraînement et $\vec{a}_c$ celle de Coriolis

L'accélération d'entraînement est celle du point coïncidant qui, rappelons-le, décrit un cercle de rayon r à la vitesse angulaire ω constante $\Rightarrow$ l'accélération est purement normale et vaut :

$$\vec{a}_e = -r\omega^2\vec{e}_r = -v_1 t\omega^2\vec{e}_r$$

L’accélération de Coriolis est donnée par la formule : $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_1 = 2\omega v_1 \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = 2v_1\omega\vec{e}_r$; d’où :

$$\boxed{\vec{a}_2 = \vec{a}_1 - v_1\omega^2 t\vec{e}_r + 2v_1\omega\vec{e}_\theta = -v_1\omega^2 t\vec{e}_r + 2v_1\omega\vec{e}_\theta}$$

(en effet : $a_1 = 0$, puisque $v_1 = cste$)

4) Les modules de la vitesse et de l’accélération se calculent simplement selon :

$$\boxed{\|\vec{v}_2\| = \sqrt{v_1^2 + (v_1\omega t)^2} = v_1\sqrt{1+(\omega t)^2}}$$

et

$$\boxed{\|\vec{a}_2\| = \sqrt{\left(v_1\omega^2 t\right)^2 + (2v_1\omega)^2} = v_1\omega\sqrt{4+(\omega t)^2}}$$